ALGÈBRE LINÉAIRE - MATH111(F)
Semestre d'automne — 2025-2026

Série 8: Théorème du rang, bases et coordonnées

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

(O.1) **utiliser le théorème du rang** pour calculer des dimensions de sous-espaces ;

(O.2) **calculer les coordonnées** d'un vecteur relatives à une base.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- rang d'une application linéaire
- rang d'une matrice
- matrices ligne-équivalentes
- coordonnées

Noyau d'exercices

1.1 Théorème du rang et bases des noyaux et des images

Exercice 1 (Théorème du rang I)

(a) Soit A une matrice de taille 5×6. Si $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3$, quel est le rang de A?

(b) Soit A une matrice de taille 7×3. Quel est le rang maximum de A? Quelle est la dimension minimum de $\mathrm{Ker}(A)$? Répondre aux mêmes questions si A est une matrice de taille 3×7.

(c) Soit A une matrice carrée de taille n. Donner une condition sur $\mathrm{rang}(A)$ pour que A^T soit inversible.

(d) Soit $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ une application linaire. Si $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$, quel est le rang de T ?

(e) Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une transformation linéaire telle que $T \circ T \circ T = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, où $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ est l'application identité de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(T)$?

Exercice 2 (Théorème du rang II)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix}.$$

Donner une base pour le noyau, l'image, et le sous-espace vectoriel $\mathrm{Lgn}(A)$ engendré par les lignes de A, puis vérifier l'affirmation du théorème du rang dans ce cas.

Exercice 3 (Théorème du rang III)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer le rang de A et la dimension du noyau de A.
(b) Même question pour A^{T}.
(c) On suppose qu'une matrice A de taille 7×7 possède un pivot dans chaque ligne. Quel est le rang de A ? Quelle est la dimension du noyau de A ?
(d) On considère une matrice A de taille $m \times n$ et un vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Quelle doit être la relation entre le rang de la matrice $[A \vdots \mathbf{b}]$ et le rang de A pour que l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ soit compatible ?

1.2 Bases et coordonnées

Exercice 4 (Coordonnées I)

(a) On considère les vecteurs

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

exprimés dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Trouver les coordonnées de $\mathbf{v}$ dans la base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$.

(b) On considère les vecteurs

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

exprimés dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Trouver les coordonnées de $\mathbf{v}$ dans la base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5 (Bases et coordonnées)

(a) Prouver que les vecteurs

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer le vecteur de coordonnées de

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

relatives à la base précédente.

(b) Démontrer que l'ensemble $\mathscr{B}' = \{1+t^2, t+t^2, 1+2t+t^2\}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Calculer le vecteur de coordonnées de $p = t$ relatives à la base précédente.

(c) Soit $\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×3. Montrer que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes. Compléter cette famille de quatre matrices en une base de $\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ et calculer le vecteur de coordonnées de la matrice

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

relatives à la base obtenue.

Exercice 6 (Coordonnées II)
On rappelle que $\mathbb{P}_2$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit $\mathscr{B} = \{1+t^2, t+t^2, 1+2t+t^2\}$ la base de $\mathbb{P}_2$ et $p = 1+4t+7t^2$. Calculer les coordonnés de p relatives à la base $\mathscr{B}$.

Pour compléter la pratique

2.1 Preuve d'un résultat du cours

Exercice 7 (Une autre caractérisation de la notion de base)
Soient V un espace vectoriel et $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ une famille finie de n vecteurs de V. Prouver que $\mathscr{B}$ est une base de V si et seulement si tout vecteur $v \in V$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$.

2.2 Théorème du rang et bases des noyaux et des images

Exercice 8 (Théorème du rang IV)

Rappel de la théorie

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que les matrices A et B sont ligne-équivalentes.
Indication : quelles sont les formes échelonnées réduites de ces deux matrices ?

(b) En utilisant seulement que A et B sont ligne-équivalente et le théorème du rang, calculer le rang de A et $\dim(\mathsf{Ker}(A))$.

(c) Trouver une base pour chacun des sous-espaces $\mathsf{Img}(B)$, $\mathsf{Ker}(B)$ et $\mathsf{Ker}(B^{\mathrm{T}})$, ainsi que du sous-espace vectoriel $\mathsf{Lgn}(B)$ engendré par les lignes de B.

(d) En utilisant seulement que A et B sont ligne-équivalente et le théorème du rang, trouver une base pour chacun des sous-espaces $\mathsf{Img}(A)$, $\mathsf{Ker}(A)$ et $\mathsf{Ker}(A^{\mathrm{T}})$, ainsi que du sous-espace vectoriel $\mathsf{Lgn}(A)$ engendré par les lignes de A. Que remarquez-vous ? Dans quel(s) cas est-il nécessaire d'effectuer de nouveaux calculs ?

Exercice 9 (QCM sur le théorème du rang)
Résoudre les QCM dans les items suivants, où chaque QCM n'admet qu'une seule réponse correcte.

(a) Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix},$$

alors

- ☐ $\mathsf{Img}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 0 ;
- ☐ $\mathsf{Img}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 0 ;
- ☐ $\mathsf{Img}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1 ;
- ☐ $\mathsf{Img}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.

(b) Il existe une matrice A de taille 3×7 telle que

- ☐ $\dim(\mathsf{Ker}(A)) = 2$ et $\dim(\mathsf{Img}(A)) \leq 4$;
- ☐ $\dim(\mathsf{Ker}(A)) = 3$ et $\dim(\mathsf{Img}(A)) = 4$;
- ☐ $\dim(\mathsf{Ker}(A)) = 4$ et $\dim(\mathsf{Img}(A)) \leq 2$;
- ☐ $\dim(\mathsf{Ker}(A)) = 5$ et $\dim(\mathsf{Img}(A)) = 2$.

(c) Si A est une matrice inversible de taille 5, alors

- ☐ les colonnes de A n'engendrent pas $\mathbb{R}^5$;
- ☐ les lignes de A sont linéairement indépendantes ;
- ☐ le noyau de A est vide ;
- ☐ le rang de A est strictement plus petit que 5.

(d) La matrice qui représente une application linéaire $T : \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ est de taille

- [ ] 3×3 ;
- [ ] 3×9 ;
- [ ] 3×6 ;
- [ ] 9×3.

(e) Soit $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2$. Alors,

- [ ] T n'est pas une application linéaire ;
- [ ] $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$ et $\dim(\mathrm{Img}(T)) = 2$;
- [ ] $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$ et $\dim(\mathrm{Img}(T)) = 1$;
- [ ] $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 2$ et $\dim(\mathrm{Img}(T)) = 1$.

(f) Soit $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2$. Alors, une base du noyau de T est donnée par

- [ ] $\{t\}$;
- [ ] $\{t, 3+t^2\}$;
- [ ] $\{-2+t+3t^2, 2-3t^2\}$;
- [ ] $\{2-3t^2\}$.

2.3 Bases et coordonnées

Exercice 10 (QCM sur bases et coordonnées)
Résoudre les QCM dans les items suivants, où chaque QCM n'admet qu'une seule réponse correcte.

(a) L'ensemble

$$V = \left\{A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A \text{ est inversible}\right\}$$

- [ ] est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 2 ;
- [ ] est un espace vectoriel pour la somme et le produit par scalaires usuels de matrices ;
- [ ] n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$;
- [ ] est le noyau d'une application linéaire $T : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

(b) Étant donné la base canonique

$$\mathscr{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

alors le vecteur de coordonnées $[A]_{\mathscr{B}}$ de A relatives à la base $\mathscr{B}$ est

- [ ] $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;
- [ ] $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;
- [ ] $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$;
- [ ] $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c) La famille suivante est une base de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

- [ ] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$;
- [ ] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$;
- [ ] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$;
- [ ] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.